

Epreuve sur dossier du CAPES externe de mathématiques, session 2016

(ORAL 2)

Ce document contient la liste des dossiers proposés aux candidats passant le second oral du CAPES externe 2016 (session normale), telle qu'elle a été publiée sur le site officiel du Jury de l'époque.

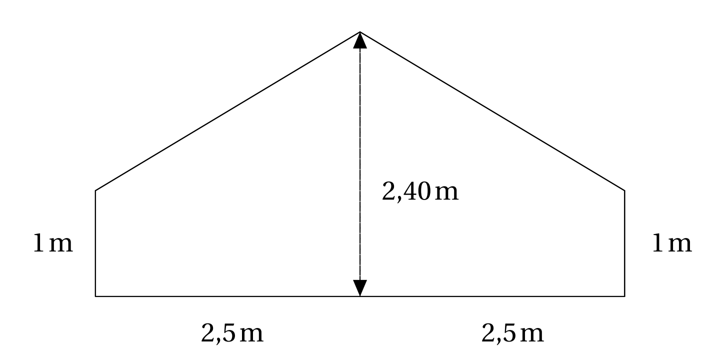
Pour me contacter : dany-jack.mercier@hotmail.fr.
Ce document est placé sur le site MégaMaths.

0 [epreuvesurdossier2016]

Thème : géométrie plane

L'exercice

Un studio sous les toits est mis en location dans une agence immobilière. Au sol, ce studio est un rectangle de 6 m de longueur et 5 m de largeur.
La coupe transversale de ce studio est donnée ci-dessous :



Pour le calcul du loyer, une loi, appelée loi Carrez, détermine la superficie au sol habitable en ne prenant en compte que l'aire des pièces dont la hauteur sous plafond est supérieure ou égale à 1,80 m. Calculer, en m^2, la « superficie loi Carrez » de ce studio.

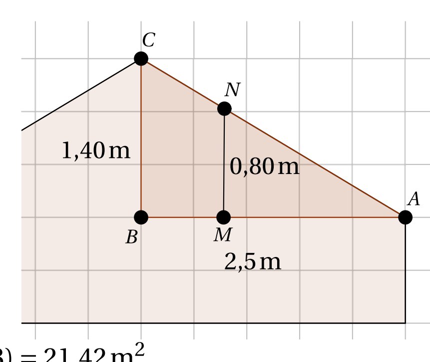
Les réponses de deux élèves de troisième

Élève 1

Comme 1,80 m *c'est les* $\frac{3}{4}$ *de* 2,40 m*, je calcule les* $\frac{3}{4}$ *de* 2,50 m *grâce à la propriété de proportionnalité des longueurs. On a donc* $2,5 \times \frac{3}{4} = 1,875$ m.
On doit donc se placer à 1,875 m *du mur de* 1 m *pour avoir* 1,80 m *sous le plafond. Il reste donc en largeur :* $5 - 2 \times 1,875 = 1,25$ m.
La superficie « loi Carrez » est donc : $1,25 \times 6 = 7,50$ m^2.

Élève 2

Je me place dans le triangle ABC.
$\tan \widehat{BAC} = \frac{1,4}{2,5} = 0,56$. *Donc* $\widehat{BAC} = 29,2°$.
On obtient alors $\tan \widehat{BAC} = \frac{MN}{AM}$.
Donc $AM = \frac{0,8}{\tan 29,2°} \approx 1,43$ m.



La superficie « loi Carrez » du studio est donc : $6 \times (5 - 1,43) = 21,42$ m^2.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites, les compétences développées par chacun et leurs éventuelles erreurs.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *géométrie plane*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.



Thème : probabilités

L'exercice

Arnaud et Bernard jouent à un jeu de dé. Le jeu consiste pour chacun d'eux à choisir un nombre compris entre 3 et 18, puis chaque joueur lance trois dés cubiques équilibrés et calcule la somme des nombres portés par les trois faces supérieures.
Arnaud choisit le nombre 9, Bernard le nombre 10. Qui a le plus de chances de gagner ?

Les réponses de trois élèves de seconde

Élève 1

Pour avoir un total égal à 9, on peut avoir : 6+2+1 ou 5+3+1 ou 5+2+2 ou 4+4+1 ou 4+3+2 ou 3+3+3.
Pour avoir un total égal à 10, on peut avoir : 6+3+1 ou 6+2+2 ou 5+4+1 ou 5+3+2 ou 4+4+2 ou 4+3+3.
Il y a donc autant de possibilités de faire 9 que de faire 10, je pense qu'Arnaud et Bernard ont autant de chances de gagner.

Élève 2

J'ai utilisé un tableur pour faire 100 lancers, avec la fonction ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6).

	A	B	C	D	E	F
1	dé 1	dé 2	dé 3	somme		
2	6	1	5	12		
3	5	3	6	14		
4	4	2	6	12	les 9	13
5	6	4	1	11	les 10	19
6	2	3	5	10		

Sur cet exemple j'ai obtenu le 10 plus souvent que le 9, mais en recommençant plusieurs fois 100 lancers, j'ai obtenu parfois le 9 plus souvent que le 10, et parfois égalité. Je pense donc qu'Arnaud et Bernard ont autant de chances de gagner.

Élève 3

Avec ma calculatrice j'ai tapé l'algorithme ci-contre : N doit contenir le nombre de 9, D le nombre de 10. Quand j'exécute le programme, il me donne toujours beaucoup plus de 10 que de 9. Je pense que c'est Bernard qui a le plus de chances de gagner, mais je trouve étrange qu'il y ait un tel écart entre les 10 et les 9.

```
N prend la valeur 0
D prend la valeur 0
pour I variant de 1 à 100 faire
  | Choisir un entier R au hasard
  |   entre 1 et 6.
  | Affecter à S la valeur 3R
  | si S = 9 alors
  |   | N prend la valeur N + 1
  | sinon
  |   | D prend la valeur D + 1
  | fin
fin
Afficher N,D
```

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves en mettant en évidence les compétences acquises et les difficultés rencontrées par chacun d'eux.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde, en vous appuyant sur les productions des élèves.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *probabilités* à des niveaux de classe différents. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs pédagogiques visés par chacun de ces exercices.

Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

L'espace est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$. Dans ce repère, on définit les quatre points $A(1;2;3)$, $B(2;-1;0)$, $C(0;-3;1)$ et $D(-1;0;2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

Les réponses de trois élèves de terminale S

Élève 1

Je détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, vecteur directeur de la droite (AB) et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$, vecteur directeur de la droite (CD).

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles. Alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

Élève 2

J'ai utilisé un logiciel de géométrie dans l'espace.
J'ai entré les coordonnées des points A, B, C et D puis j'ai tracé le plan ABC.
Son équation est $9x-5y+8z=23$.
Donc, je peux dire que D n'appartient pas au plan ABC.

Élève 3

J'écris une équation paramétrique de chacune des deux droites :

$$(AB)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t\\ y &=& 2-3t\\ z &=& 3-3t\end{array}\right. \quad t\in\mathbf{R} \qquad (CD)\left\{\begin{array}{lcl} x &=& -t'\\ y &=& -3+3t'\\ z &=& 1+t'\end{array}\right. \quad t'\in\mathbf{R}$$

$M(x;y;z)$ est un point d'intersection des deux droites si et seulement si ses coordonnées vérifient les deux équations. On obtient un système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1+t &=& -t'\\ 2-3t &=& -3+3t'\\ 3-3t &=& 1+t'\end{array}\right.$$

Dans la première équation on a $t'=-1-t$ et en remplaçant dans la troisième, on obtient $3-3t=1-1-t$ ce qui donne $t=\dfrac{3}{2}$ et donc ensuite $t'=-\dfrac{5}{2}$. On peut maintenant calculer les coordonnées de M par exemple à partir de (AB) et on trouve $M\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. Les droites (AB) et (CD) sont donc sécantes en M.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence les compétences mobilisées ainsi que les erreurs éventuelles.

2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – En motivant vos choix, proposez deux ou trois exercices sur le thème de la *géométrie dans l'espace*.

Thème : suites

L'exercice

On considère la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$u_0 = 7 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 10u_n - 18.$$

Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

Les démarches de deux élèves de terminale S

Élève 1

Je calcule les premiers termes de la suite :

$$u_1 = 10 \times 1 - 18 = -8$$
$$u_2 = 10 \times 2 - 18 = 2$$
$$u_3 = 10 \times 3 - 18 = 12$$
$$u_4 = 10 \times 4 - 18 = 22$$

Il semble que la suite (u_n) soit arithmétique de raison 10, mais cela ne fonctionne pas avec u_0. Pourtant, en posant $f(x) = 10x - 18$, on définit (u_n) à l'aide de la fonction affine f donc la suite devrait être arithmétique.

Élève 2

Je constate que $u_1 = 52$, $u_2 = 502$, $u_3 = 5002$.
Il semble que pour tout entier n sauf 0, $u_n = 500\ldots02$ où le nombre de zéros est $n-1$.
Preuve : Supposons que $u_n = 500\ldots02$ avec $n-1$ zéros entre le 5 et le 2.
Alors la multiplication par 10 donne $500\ldots020$.
En retranchant 18, le 20 se transforme en 02 et donc on a l'écriture finale $500\ldots002$ avec un zéro de plus que pour u_n. Ainsi, on a bien $u_{n+1} = 500\ldots02$ avec $n-1+1$ zéros entre le 5 et le 2, et la propriété est démontrée par récurrence.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves en mettant en évidence les compétences acquises et les difficultés rencontrées .

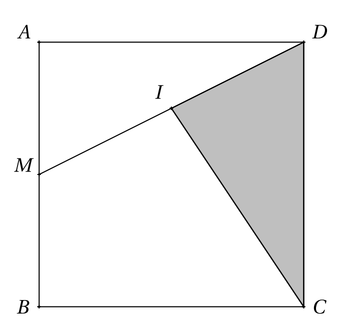
2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposez deux autres exercices sur le thème *suites*. Vous motiverez vos choix en indiquant les compétences que vous cherchez à développer chez les élèves.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

$ABCD$ est un carré de côté 5 cm.
M est un point de $[AB]$.
I est le milieu du segment $[DM]$.



Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du triangle DCI est minimale ?

Extrait des programmes de mathématiques de collège

Préambule pour le collège

1.1. Les mathématiques comme discipline de formation générale

[...]
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi l'exercice proposé permet aux élèves de prendre conscience des différentes composantes de l'activité mathématique décrites dans le préambule des programmes de collège.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de quatrième.

3 – En motivant vos choix, proposez trois exercices sur le thème *conjecture et démonstration*, dont un au moins au niveau lycée.

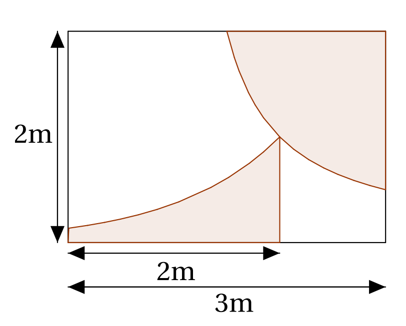
Thème : grandeurs et mesures

L'exercice

Léonard désire réaliser une fresque murale pour décorer un mur de sa chambre. Le modèle choisi est schématisé ci-contre.

Le bord supérieur de la partie en bas à gauche est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \mathrm{e}^{x-2}$.

Le bord inférieur de la partie en haut à droite est modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1{,}5\,;\,3]$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.



Il dispose d'un pot de peinture de 0,5 litre dont le pouvoir couvrant est de $5\,\text{m}^2$ par litre.
Ce pot lui suffira-t-il pour réaliser sa fresque ?

Extrait du document « Les compétences mathématiques au lycée »

La formation mathématique au lycée général et technologique vise deux objectifs :

- *l'acquisition de connaissances et de méthodes nécessaires à chaque élève pour construire son avenir personnel, professionnel et citoyen, et préparer la poursuite d'études supérieures ;*
- *le développement de compétences transversales (autonomie, prise d'initiative, adaptabilité, créativité, rigueur...) et de compétences spécifiques aux mathématiques :*

Chercher[...], ***Modéliser***[...], ***Représenter***[...], ***Calculer***[...], ***Raisonner***[...], ***Communiquer***[...].

Cadre de mise en œuvre
La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences. Cependant, pour prendre des initiatives, imaginer des pistes de solution et s'y engager sans s'égarer, l'élève doit disposer d'automatismes. En effet, ceux-ci facilitent le travail intellectuel en libérant l'esprit des soucis de mise en œuvre technique et élargissent le champ des démarches susceptibles d'être engagées. L'installation de ces réflexes nécessite la mise en œuvre directe, sur des exercices aux objectifs circonscrits, de procédures de base liées à chacune de ces compétences. Il n'y a pas d'ordre chronologique imposé entre l'entraînement sur des exercices et la résolution de problèmes. Cette dernière peut en effet révéler le besoin de s'exercer sur des tâches simples, d'ordre procédural, et motiver ainsi la nécessité de s'y engager.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi un tel exercice répond aux objectifs mentionnés dans le document « Les compétences mathématiques au lycée ».

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *grandeurs et mesures* à des niveaux de classe différents dont l'un au moins pour des élèves de collège. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

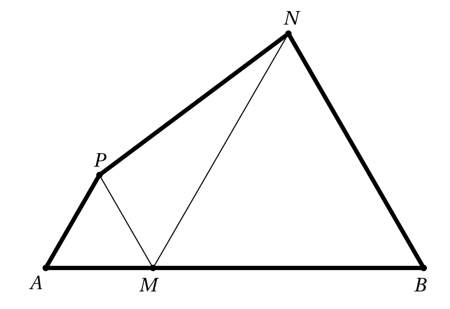


Thème : optimisation

L'exercice

Soient un segment $[AB]$ de longueur 10 cm et M un point de $[AB]$ distinct de A et B. Du même côté de la droite (AB), on construit deux triangles équilatéraux AMP et MBN.

Déterminer la position du point M pour laquelle l'aire du quadrilatère $ABNP$ est minimale.



Les réponses proposées par deux élèves de première S

Élève 1

En faisant la figure avec un logiciel de géométrie dynamique et en déplaçant le point M sur le segment $[AB]$ on s'aperçoit que la figure est symétrique.
Par conséquent, l'aire de $ABNP$ est minimale lorsque M est le milieu de $[AB]$, c'est-à-dire $AM = 5$ cm.

Élève 2

J'ai fait une figure et j'ai trouvé que les aires de AMP et MNB sont $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$ et $\dfrac{(10-x)^2\sqrt{3}}{4}$.

En revanche, je ne vois pas comment on peut calculer l'aire de MPN car le triangle n'est pas un triangle particulier... Du coup, je ne vois pas comment on peut faire. Mais je pense que l'aire est minimale si on prend pour M le milieu de $[AB]$. J'ai fait plusieurs essais à la main et c'est pour cette position que j'ai trouvé l'aire minimale.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les réponses de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles. Quels conseils pourriez vous apporter à chacun d'eux ?

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *optimisation* à des niveaux de classe différents, dont l'un au collège et l'un au lycée. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : conjecture et démonstration

L'exercice

Pour tout nombre réel m, on considère la fonction f_m définie sur $\mathbf{R}$ par $f_m(x) = 2x^2 + mx + 1$.

Conjecturer la nature de l'ensemble des points formé par les sommets des paraboles représentant les fonctions f_m lorsque m parcourt $\mathbf{R}$, puis vérifier ou infirmer cette conjecture par une démonstration.

Les solutions proposées par deux élèves de première

Élève 1

J'ai tracé la courbe avec un logiciel de géométrie dynamique, activé la trace du sommet S de la parabole $(\mathscr{P})$ et je constate que le sommet S décrit une parabole orientée vers le bas, de sommet $(0; 1)$ et qui passe par les points de coordonnées $(1; -1)$ et $(-1; -1)$.
J'en déduis que je cherche une parabole $y = ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} 1 & = & c \\ -1 & = & a+b+c \\ -1 & = & a-b+c \end{cases}$$

Après calculs, je trouve que la parabole que décrit S est celle d'équation $y = -2x^2 + 1$.

Élève 2

Je sais que le sommet S de la parabole $(\mathscr{P})$ est en $-\dfrac{m}{4}$.

Dans le tableur, j'ai mis en colonne A les valeurs de m entre -10 et 10 ;
en colonne B, j'ai mis les valeurs de x_S
et en colonne C, j'ai mis les valeurs de y_S.
Puis, j'ai tracé la courbe de y_S en fonction de x_S. J'obtiens une parabole comme le montre le graphique.

	A	B	C
1	m	x_S	y_S
2	-10	2,5	-11,5
3	-9,9	2,475	-11,25125
4	-9,8	2,45	-11,005
5	-9,7	2,425	-10,76125
6	-9,6	2,4	-10,52
7	-9,5	2,375	-10,28125
8	-9,4	2,35	-10,045
9	-9,3	2,325	-9,81125
10	-9,2	2,3	-9,58
11	-9,1	2,275	-9,35125
12	-9	2,25	-9,125
13	-8,9	2,225	-8,90125
14	-8,8	2,2	-8,68
15	-8,7	2,175	-8,46125
16	-8,6	2,15	-8,245
17	-8,5	2,125	-8,03125
18	-8,4	2,1	-7,82
19	-8,3	2,075	-7,61125
20	-8,2	2,05	-7,405
21	-8,1	2,025	-7,20125
22	-8	2	-7
23	-7,9	1,975	-6,80125
24	-7,8	1,95	-6,605
25	-7,7	1,925	-6,41125
26	-7,6	1,9	-6,22

y = -2x² + 5E-14x + 1

En demandant au tableur l'équation, il me donne : $y = -2x^2 + 5E - 14x + 1$.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les compétences mobilisées par chacun des élèves et indiquez les aides qui pourraient leur être apportées.

2 – En vous appuyant sur l'une ou l'autre des productions d'élèves, présentez une correction de l'exercice comme vous l'exposeriez devant une classe de première.

3 – En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* dont l'un au moins peut illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.



Thème : statistiques

L'exercice

Voici une série de notes entières de moyenne 12 :

10 ; 5 ; 15 ; 13 ; 18 ; 14 ; 15 ; 8 ; 13 ; 6 ; 15.

Les questions suivantes portent toutes sur cette série initiale.

1. Supprimer une note pour que la moyenne diminue, mais le moins possible.
2. Peut-on augmenter la médiane de 1 en modifiant une seule note ?
3. En modifiant deux notes, peut-on garder la même moyenne et augmenter la médiane de 1 ?
4. En modifiant une note, peut-on garder la même médiane et diminuer la moyenne de 1 ?

Les réponses de deux groupes d'élèves de troisième

Groupe 1

1. *On supprime le 10. La moyenne baisse, c'est* 11,09.
2. *On change la note du milieu : le 14 en 15.*

Groupe 2

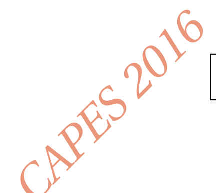
3. *On remplace les deux 13 par un 12 et un 14.*
4. *Non ce n'est pas possible si on ne change qu'une seule note, mais avec deux notes oui on peut.*

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des groupes d'élèves en mettant en évidence les compétences manifestées et en précisant les erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de troisième.

3 – En motivant vos choix, proposez trois exercices sur le thème *statistiques*, dont l'un au moins au niveau lycée.



Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Un pépiniériste propose à la vente des plants de mufliers à 5,25 € le plant et des plants de jacinthes à 2,50 € le plant. À la fin de la journée, sa recette est de 338 € et il sait qu'il a vendu au moins 40 plants de chaque sorte.

Déterminer le nombre de plants de chaque sorte qui ont été vendus .

Les réponses de trois élèves de terminale scientifique, spécialité mathématiques

Élève 1

Je note x le nombre de mufliers et y le nombre de jacinthes.
J'ai donc l'équation diophantienne $5{,}25x + 2{,}50y = 338$.
J'écris l'algorithme d'Euclide :

$$5{,}25 = 2{,}50 \times 2 + 0{,}25$$
$$2{,}50 = 0{,}25 \times 10 + 0$$

J'essaye de résoudre l'équation diophantienne mais je n'arrive pas à appliquer l'égalité de Bézout.

Élève 2

On a $5{,}25x + 2{,}50y = 338$ *or* $5{,}25 \times 40 + 2{,}50 \times 40 = 310$.
Donc $5{,}25 \times x + 2{,}50 \times y = 28$, *je dois donc résoudre* $21x + 10y = 112$.
Donc logiquement x doit finir par 2. Le pépiniériste a donc vendu 42 *mufliers et* 47 *jacinthes.*

Élève 3

On peut trouver le résultat 42 *et* 47 *grâce à un algorithme.*

x est le nombre de mufliers
y est le nombre de jacinthes
x prend la valeur 40
y prend la valeur 40
tant que $x \times 5{,}25 + y \times 2{,}50 \neq 338$ **faire**
| *Changer les valeurs de x et y*
fin
Afficher x et y

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions des élèves en étudiant les compétences manifestées et indiquez des aides que vous pourriez leur apporter.

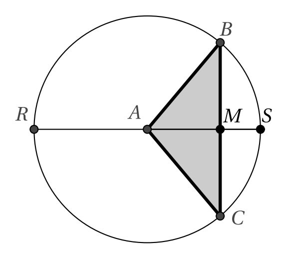
2 – Présentez, en vous appuyant sur les productions d'élèves, une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique, spécialité mathématiques.

3 – Proposez deux exercices, un au niveau lycée et un au niveau collège, sur le thème *problème avec prise d'initiative*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.

Thème : optimisation

L'exercice

On considère le cercle Γ de diamètre $[RS]$ et de centre A avec $RS = 2$. Pour tout point M de $[AS]$, on trace la perpendiculaire à (RS) passant par M qui coupe le cercle en B et C. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale ?



D'après manuel MATH'x première S, Didier

Les réponses de trois élèves de première S

Élève 1

On note x la longueur AM, on a $BC = 2x$.
J'en déduis l'aire du triangle ABC qui vaut $\dfrac{x \times 2x}{2} = x^2$.
Donc, l'aire du triangle ABC est maximale lorsque x^2 est le plus grand possible, c'est-à-dire lorsque $x = 1$ quand le point M est en S.

Élève 2

Le triangle AMB est rectangle en M donc d'après Pythagore, $AB^2 = AM^2 + MB^2$.
donc $MB^2 = AM^2 - AB^2 = x^2 - 1$. J'en déduis que $MB = \sqrt{x^2-1}$.
Je note $f(x)$ l'aire cherchée, on a : $f(x) = \dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{2}$.
J'ai tracé la courbe de la fonction sur ma calculatrice, mais cela ne m'a rien donné.

Élève 3

Je note $\theta = \widehat{MAB}$ et $f(\theta)$ l'aire du triangle ABC.
On a : $f(\theta) = \dfrac{AM.BC}{2} = \dfrac{\cos(\theta).2\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)\sin(\theta)$.
Comme $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$, on a $f(\theta) \leqslant 2$.
Il existe donc bien une position du point M pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale, cette aire vaut 2.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la démarche de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposez deux exercices sur le thème de l'*optimisation*, dont l'un au moins devra illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.

Thème : probabilités

L'exercice

On dispose des douze « figures » d'un jeu de cartes : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire au hasard successivement et avec remise six cartes du jeu. Déterminer combien on peut espérer obtenir de rois en moyenne.
2. On tire maintenant au hasard successivement et avec remise n cartes du jeu. Déterminer la valeur minimale de n pour qu'avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 on obtienne au moins un roi.

Les réponses de deux élèves de première à la question 1

Élève 1

J'ai écrit un algorithme qui simule l'expérience décrite 1 000 fois :

```
S prend la valeur 0
pour k variant de 1 à 1000 faire
    pour j variant de 1 à 6 faire
        Affecter à aléa une valeur choisie au hasard parmi 1, 2
          ou 3.
        si aléa = 1 alors
            S prend la valeur S + 1
        fin
    fin
fin
M prend la valeur S/1000
Afficher M
```

J'ai lancé 3 fois l'algorithme et j'ai trouvé 2,007 ; 1,977 *et* 1,992.
J'en déduis que l'on peut espérer autour de 2 rois.

Élève 2

Je vais noter X la variable aléatoire qui donne le nombre de rois que j'ai tirés. Comme en cours, il suffit de calculer $E(X) = 6 \times \frac{1}{3} = 2$ car on tire 6 cartes et $\frac{1}{3}$ est la probabilité d'obtenir un roi quand on pioche une seule carte. On peut donc espérer 2 rois.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en évaluant la pertinence des démarches de chacun et en mettant en évidence les compétences acquises et les erreurs éventuelles.

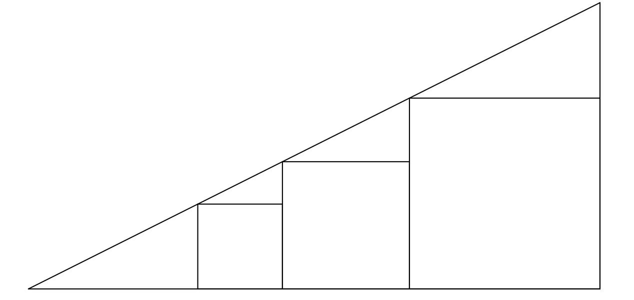
2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction des deux questions de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3 – Proposez deux ou trois exercices sur le thème *probabilités*. Vous motiverez vos choix en précisant les objectifs visés par chacun de ces exercices.

Thème : géométrie

L'exercice

Le côté du plus petit carré mesure 16 cm et celui du plus grand 36 cm.
Combien mesure le côté du carré central ?



Calendrier mathématique 2016, un défi quotidien

Extrait des programmes de mathématiques de collège

Préambule pour le collège

[...]

4. Organisation des apprentissages et de l'enseignement

[...]

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

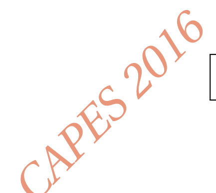
L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Précisez en quoi l'exercice proposé répond aux objectifs assignés à la résolution de problèmes figurant dans l'extrait de programme ci-dessus.

2 – Présentez au moins deux stratégies différentes de résolution de ce problème.

3 – En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *géométrie*, dont un au moins au niveau lycée.



Thème : problème avec prise d'initiative

L'exercice

Deux cargos suivent des routes rectilignes et perpendiculaires. Ils avancent à la même vitesse en direction du point de croisement de leurs routes.
Quand le premier est encore à 10 km du point de croisement de leurs routes, l'autre est à 8 km de ce point.
Il y a de la brume et la visibilité n'excède pas 1,3 km !
Pourront-ils se voir à un moment de leurs parcours ?

Les réponses de trois groupes d'élèves de première

Groupe 1

Nous avons utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Nous avons créé un curseur a variant de 0 *à* 10 *avec un pas de* 0,1*, puis un point A sur l'axe des abscisses de coordonnées* $(10-a\,;0)$ *et un point B sur l'axe des ordonnées de coordonnées* $(0\,;8-a)$*. Nous avons fait afficher la distance AB. En déplaçant le curseur, nous avons vu que la distance la plus petite était égale à* 1,41*. Comme elle est plus grande que* 1,3*, les deux cargos ne se verront pas.*

Groupe 2

Nous avons fait une figure à la main et nous avons vu que l'on pouvait utiliser le théorème de Pythagore parce que les trajectoires sont perpendiculaires.

Pour faire plus de calculs nous avons utilisé un tableur. Nous avons appelé B le cargo 1 *et C le cargo* 2 *et A le point de croisement de leurs trajectoires. Comme les cargos avancent à la même vitesse, ils parcourent en même temps la même distance.*
Pour calculer la distance BC, nous avons entré la formule "=RACINE(A2^2+B2^2)" que nous avons tirée vers le bas.

	A	*B*	*C*
1	*AB*	*AC*	*BC*
2	10	8	12,806 428
3	9,5	7,5	12,103 718
4	9	7	11,401 754
5	8,5	6,5	10,700 467

En faisant défiler nous avons vu que la distance la plus petite obtenue était environ 1,414*.*
Donc nous pensons que les deux cargos ne pourront pas se voir.

Groupe 3

On ne connaît pas la vitesse donc on ne peut pas savoir comment ils se croiseront.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque groupe en mettant en évidence les compétences mobilisées.

2 – En vous appuyant sur les productions des groupes d'élèves, présentez la correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *problème avec prise d'initiative* à des niveaux différents. Vous motiverez votre choix.

Thème : suites

L'exercice

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\text{C}$. La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. Pour n non nul, la valeur T_n est calculée, puis affichée par l'algorithme ci-contre.

```
T prend la valeur 25
Demander la valeur de n.
pour i variant de 1 à n faire
 | T prend la valeur 0,85 × T + 15
fin
Afficher T
```

1 – Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.

2 – Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

3 – Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

D'après baccalauréat, série S

Les réponses de deux élèves de terminale S à la question 3

Élève 1

	A	B
1	0	15
2	1	15,85
3	2	16,7
4	3	17,55
5	4	18,4
6	5	19,25
7	6	20,1
8	7	20,95
9	8	21,8
10	9	22,65
11	10	23,5

En poursuivant, on trouve que la stérilisation commence au bout de 83 minutes.

Élève 2

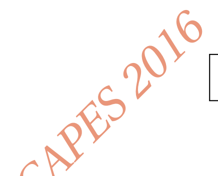
On doit résoudre $100 - 75 \times 0{,}85^n = 85$.
$100 - 75 \times 0{,}85^9 \approx 82{,}6$ *et* $100 - 75 \times 0{,}85^{10} \approx 85{,}2$.
Donc la stérilisation commence au bout de 10 minutes.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chaque élève en mettant en évidence ses réussites et ses erreurs éventuelles.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale S.

3 – En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *suites*.



Thème : géométrie dans l'espace

L'exercice

Dans un tétraèdre $ABCD$, I, J et K sont respectivement les milieux de $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.
Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CJ}$.
Démontrer que les points I, E, F et K sont coplanaires.

Les réponses de trois élèves

Élève 1

Il est clair que $(B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA})$ est un repère de l'espace. Dans ce repère, on a : $I(0\,;\,0\,;\,1/2)$, $K(1/2\,;\,0\,;\,0)$, $F(1/3\,;\,1/3\,;\,0)$ et $E(0\,;\,1/3\,;\,1/3)$. J'en déduis : $\overrightarrow{IE}(0\,;\,1/3\,;\,-1/6)$ et $\overrightarrow{FK}(1/6\,;\,-1/3\,;\,0)$.
Je calcule $xy' - yx'$: $0 \times \frac{-1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}$.
$xy' - yx'$ n'est pas nul, donc (IE) et (FK) ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes et donc coplanaires.
I, E, F et K sont bien coplanaires.

Élève 2

J'ai tracé une figure. Sur la figure, j'ai tracé (IE) et (FK). Elles sont sécantes.

Élève 3

$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, d'après le théorème des milieux.
$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CE}$
$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$
Je vois sur la figure que $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$, mais je n'arrive pas à le montrer.

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les productions de ces trois élèves en mettant en évidence les outils utilisés et les erreurs éventuelles. Quelles aides pouvez-vous leur apporter ?

2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction telle que vous l'exposeriez devant une classe de terminale scientifique.

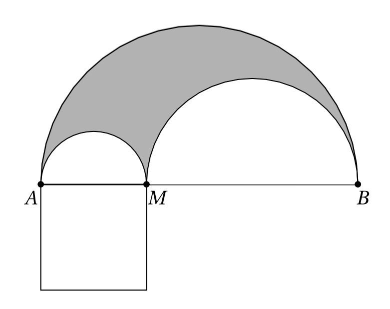
3 – Proposez deux exercices sur le thème *géométrie dans l'espace* en précisant les objectifs visés par chacun d'eux.

Thème : problème se ramenant à une résolution d'équation

L'exercice

On considère un segment $[AB]$ et on choisit un point M sur ce segment, distinct de A et B. Comme sur la figure ci-dessous, on construit un demi-cercle de diamètre $[AB]$, un demi-cercle de diamètre $[AM]$, un demi-cercle de diamètre $[BM]$ d'un côté de la droite (AB) et un carré de côté AM de l'autre côté.

Peut-on choisir le point M de telle sorte que l'aire de la surface grisée soit égale à l'aire du carré ?



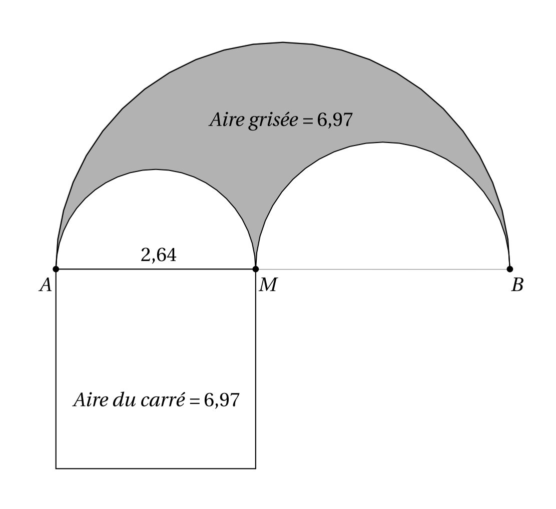
Les réponses proposées par trois élèves de seconde

Élève 1

Je ne vois pas comment on fait car il n'y a aucune valeur sur la figure.

Élève 2

J'ai fait la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
On peut choisir le point M de telle sorte que l'aire de la surface grisée soit égale à l'aire du carré.
Il faut prendre $AM = 2{,}64$



Élève 3

Je pose $AB = 1$ et $AM = x$
Pour que les deux aires soient égales, on doit avoir $\frac{\pi}{4}(x - x^2) = x^2$
et donc $x = \frac{\pi}{\pi + 4}$

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez les réponses des élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs erreurs éventuelles. Vous préciserez les conseils que vous pourriez leur apporter.

2 – Présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.

3 – Proposez deux exercices sur le thème *problème se ramenant à une résolution d'équation*. Vous prendrez soin de motiver vos choix.



Thème : problèmes avec prise d'initiative

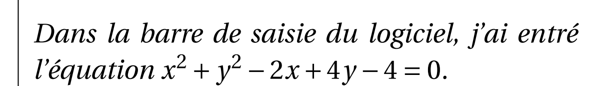
L'exercice

Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

Les réponses de deux élèves de première S

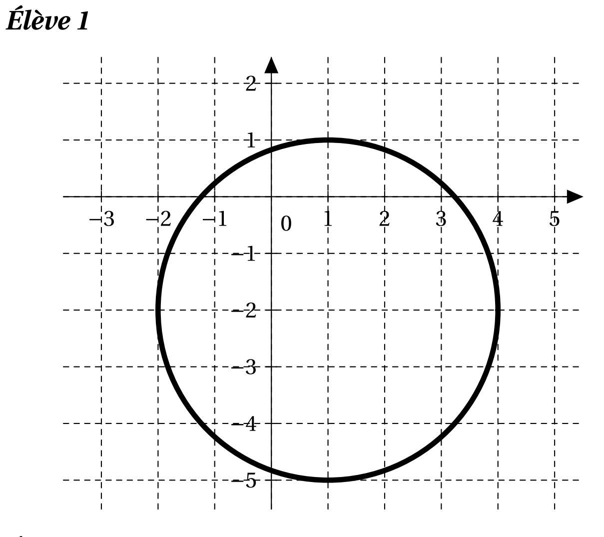
Élève 1



Dans la barre de saisie du logiciel, j'ai entré l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

J'ai réglé et affiché la grille avec un pas de 1 pour faire apparaître les points entiers.

J'ai trouvé $x = 1$ *et* $y = 1$.



Élève 2

J'ai écrit le programme ci-contre :
Quand je l'exécute, il affiche toujours :

$(-2, -2) \quad (1, -5) \quad (1, 1) \quad (4, -2).$

J'en ai déduit que ce sont les solutions de l'équation.

```
pour i allant de −100 à 100 faire
    pour j allant de −100 à 100 faire
        si i ∗ i + j ∗ j − 2 ∗ i + 4 ∗ j − 4 = 0 alors
            Afficher (i, j)
        fin
    fin
fin
```

Le travail à exposer devant le jury

1 – Analysez la production de chacun des élèves. Vous préciserez les compétences mises en jeu et indiquerez comment vous pourriez les aider à corriger leurs erreurs éventuelles.

2 – En vous appuyant sur les productions des élèves, présentez une correction de l'exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de première S.

3 – Proposez un exercice au niveau collège et un exercice au niveau lycée sur le thème *problèmes avec prise d'initiative*. Vous prendrez soin de motiver vos choix .